

Forward Return Expectations

*presented by Nathan Jardim Teixeira

MIHIR GANDHI Chicago Booth
NIELS J. GORMSEN Chicago Booth NBER
EBEN LAZARUS UC Berkeley Haas

november 2023

- Medir equity premium em múltiplos horizontes usando opções ou surveys:

Spot rate: $\mu_t^{(n)} = E_t [r_{t,t+n} - r_{t,t+n}^f]$

- Calcular equity premium esperado

forward rate: $f_t^{(n)} = \mu_t^{(n+1)} - \mu_t^{(n)} + E_t [\mu_{t+n}^{(1)}]$

- Comparar forward com realizada

Erro: $\epsilon_{t+n} = \mu_{t+n}^{(1)} - f_t^{(1)}$

$$\begin{aligned}\text{Spot rate: } \mu_t^{(n)} &= E_t [r_{t,t+n} - r_{t,t+n}^f] \\ \text{forward rate: } f_t^{(n)} &= \mu_t^{(n+1)} - \mu_t^{(n)} + E_t [\mu_{t+n}^{(1)}] \\ \text{Erro: } \epsilon_{t+n} &= \mu_{t+n}^{(1)} - f_t^{(1)}\end{aligned}$$

1 Preço de Opções:

- Amostra de equity index bem rica, mas baseada em modelo.
- Erros identificados sobre condições muito mais fracas que retornos esperados.

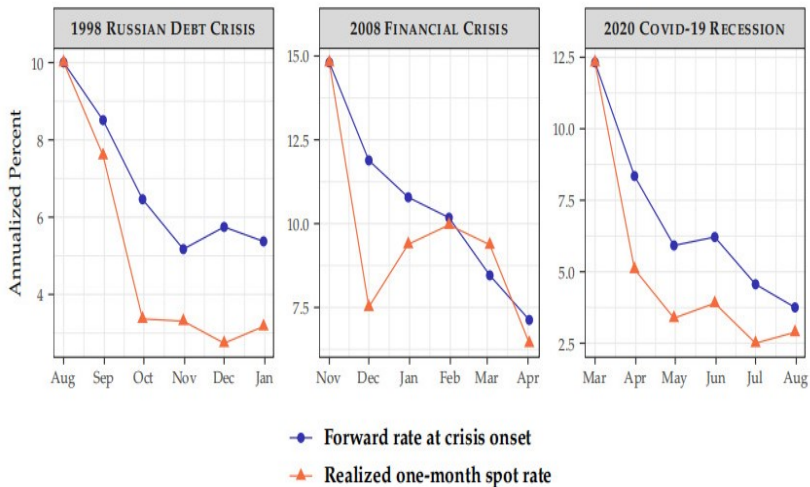
2 Survey

- Estrutura termo de surveys de Livingston e Duke-CFO
- Sem modelo para construção, mas não é rica em dados

$$\begin{aligned}\text{Spot rate: } \mu_t^{(n)} &= E_t [r_{t,t+n} - r_{t,t+n}^f] \\ \text{forward rate: } f_t^{(n)} &= \mu_t^{(n+1)} - \mu_t^{(n)} + E_t [\mu_{t+n}^{(1)}] \\ \text{Erro: } \epsilon_{t+n} &= \mu_{t+n}^{(1)} - f_t^{(1)}\end{aligned}$$

- ❶ 1. Em opções e surveys, forward são contracíclicas...
 - Quando o mercado $\searrow \Rightarrow$ expectativas do prêmio de risco $\nearrow$
 - Contraste com surveys de curto prazo [Greenwood and Shleifer 2014]
- ❷ 2. De fato bem contracíclico
 - Nos tempos ruins, o investidor acha que os retornos futuros serão excessivamente bons 'por um longo tempo, bem maior do que o que ele vai pensar futuramente.
 - Expectativas da forward são excessivamente cíclicas (e voláteis.)

Option-Based Forward e Spot realizada nas crises



	Expectations Measured by:		
	Options	Livingston Survey	CFO Survey
Panel A. Predictability in Spot Rates ($\mu_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_1 f_{i,t} + e_{i,t+1}$)			
β_1	0.88	0.68	0.63
R^2	0.71	0.38	0.46
Panel B. Predictability of Forecast Errors ($\epsilon_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_1 f_{i,t} + e_{i,t+1}$)			
β_1	-0.34	-0.19	-0.15
R^2	0.06	0.06	0.03
Panel C. Cyclical Variation in Forward Rates and Forecast Errors			
$\rho(f_{i,t}, 1/CAPE_t)$	0.04	0.42	0.21
$\rho(\epsilon_{i,t+1}, 1/CAPE_t)$	-0.38	-0.19	-0.38

Excesso de ciclicidade da forward ajuda a entender

- ① Excesso de volatilidade nos preços.
 - Quando os preços caem, parcialmente reflete expectativa de persistir o prêmio de risco alto
 - Se os investidores não superestimassem persistência, as flutuações seriam modestas (about 50 % less during 2008 crisis, nearly 100 % less during Covid crash)
- ② Demanda inelástica por equities [Gabaix Koijen 2022]
 - Puzzle: Por que investidores não mudam seus pesos em ações vs bonds em resposta a mudanças de preços
 - Resposta parcial: se preços caem, ele espera retornos altos no longo prazo
- ③ Debate sobre ciclicidade

- Construindo blocos: LVIX ($\mathcal{L}_t^N$) de Gao e Martin (2021)

$$\underbrace{\mathbb{E}_t \left[r_{t,t+n} - r_{t,t+n}^f \right]}_{\mu_t^{(n)}} = \underbrace{\mathbb{E}_t \left[M_{t,t+n} R_{t,t+n} r_{t,t+n} - r_{t,t+n}^f \right]}_{\mathcal{L}_t^n} - \underbrace{\text{Cov}_t (M_{t,t+n} R_{t,t+n}, r_{t,t+n})}_{C_t^{(n)}} \quad (1)$$

- $\mathcal{L}_t^n$ vem de opções observáveis.
- $C_t^{(n)} = 0$ sob log utilidade (MR = 1)
- Gao e Martin argumentam que $C_t^{(n)} \leq 0$, mas o que isso implica na forward? $f_t^{(n,m)} = \mathcal{L}_t^{(n+m)} - \mathcal{L}_t^n + C_t^{(n+m)} - C_t^{(n)}$
- **insight** : termo de covariância cancela nos erros de previsão:
 $\epsilon_{t+n} = \mu_{t+n}^{(1)} - f_t^{(1)}$

Erros de previsão observáveis:

$$\hat{\epsilon}_{t+n}^{(m)} = \mathcal{L}_{t+n}^{(m)} - \mathcal{L}_t^{(n+m)} + \mathcal{L}_t^{(m)}$$

Result 1 (Log-Normal Identification)

For a general SDF $M_{t,t+n}$, assuming $M_{t,t+n}$, $R_{t,t+n}$ are jointly log-normal:

$$\mathbb{E}_t[\hat{\epsilon}_{t+n}^{(m)}] = \mathbb{E}_t[\epsilon_{t+n}^{(m)}] - \text{Cov}_t(M_{t,t+n}R_{t,t+n}, \mathbb{E}_{t+n}[r_{t+n,t+n+m}])$$

- termo de covariância agora se relaciona com taxa de de desconto do risco, não mais com risco do retorno realizado
- Retornos esperados são menos voláteis que retornos realizados
- Pode ser entendido de maneira teórica ou empírica
- ideia básica de prova: SDF é ortogonal a componente inesperado de $r_{t+n,t+n+m}$

Erros de previsão observáveis:

$$\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} = \mathcal{L}_{t+n}^{(m)} - \mathcal{L}_t^{(n+m)} + \mathcal{L}_t^{(m)}$$

$$\hat{\mu}_{t+n}^{(n)} = \mathcal{L}_{t+n}^{(m)} + r_{t+n, t+n+m}^f$$

Result 2 (*Generalized Identification*)

For any SDF $M_{t,t+n}$,

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\varepsilon_{t+n}^{(m)} \right] - \text{Cov}_t \left(M_{t,t+n} R_{t,t+n}, \hat{\mu}_{t+n}^{(m)} \right)$$

- Intuição da log-normal se mantém, mas com $r_{t+n, t+n+m}$ trocado por $\hat{\mu}_{t+n}^{(n)}$
- $\hat{\mu}_{t+n}^{(n)}$ construído pelo LVIX é bem relacionado com $r_{t+n, t+n+m}$, mas a diferença é que ele é diretamente observável.
- $\hat{\mu}_{t+n}^{(n)}$ é $\frac{1}{10}$ tão volátil quanto $r_{t+n, t+n+m}$, logo covariância não observável é muito menor para erros de previsão do que para erros na spot.

Dados

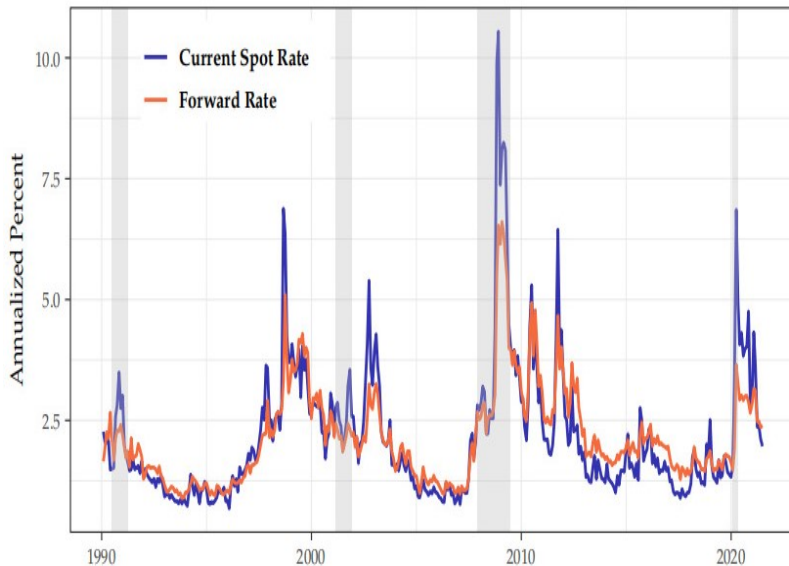
- Painel global de índice de opções da OptionMetrics (dados mensais com filtro padrão)
- Para US: amostra de 1991 a 2021
- Para outros países, a partir de 2006
- baseline, opções de 6 meses com forward de 6 meses ($n = m = 6$), pois horizonte maior tem liquidez baixa

Medindo LVIX: Gao e Martin 2021

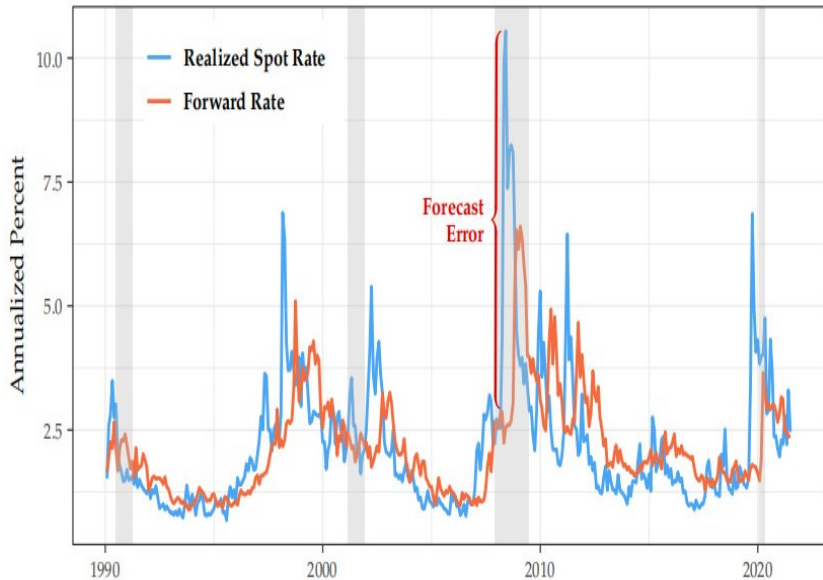
$$L_t^{(n)} = (R_{t,t+n}^f)^{-1} \mathbb{E}_t^* [R_{t,t+n} r_{t,t+n}] - r_{t,t+n}^f = \frac{1}{P_t} \left\{ \int_0^{F_t^{(n)}} \frac{\text{put}_t^{(n)}(K)}{K} dK + \int_{F_t^{(n)}}^{\infty} \frac{\text{call}_t^{(n)}(K)}{K} dK \right\}$$

- Inicialmente com Log.

Spot contemporânea (USA) e Forward



Spot realizada (USA) e Forward



Mincer-Zarnowitz Regressions for Spot Rates by Country

$$\mu_{t+6}^{(6)} = \beta_0 + \beta_1 f_t^{(6,6)} + \epsilon_{t+6}$$

	(1) U.S.	(2) Ex-U.S.	(3) All
$f_t^{(6,6)}$	0.67*** (0.096)	0.55*** (0.056)	0.56*** (0.055)
Intercept	0.74*** (0.28)		
Country FEs	✗	✓	✓
p-value: $\beta_1 = 1$	0.003	0.000	0.000
Obs.	378	1,849	2,227
R ²	0.22	0.21	0.22
Within R ²	—	0.14	0.15

SEs in (1) are heteroskedasticity and autocorrelation-robust [Lazarus et al. (2018)], and in (2)–(3) are clustered by exchange and month.

- erros clusterizados
- poder preditivo substancial
- $\beta_1 < 1$ implica que forward superestima spot futura.
- E se β_1 está sendo estimado com erro de medida?
- Iv para horizonte menor (liquidez maior)
- $f_t^{(2,1)}$ como instrumento para $f_t^{(6,6)}$

Instrumented Mincer-Zarnowitz Regressions for Spot Rates

$$\mu_{t+6}^{(6)} = \beta_0 + \beta_1 f_t^{(6,6)} + \epsilon_{t+6}, \quad f_t^{(6,6)} = \pi_0 + \pi_1 f_t^{(2,1)} + \eta_t$$

	(1)	(2)	(3)
	U.S.	Ex-U.S.	All
$f_t^{(6,6)}$	0.73*** (0.062)	0.69*** (0.078)	0.70*** (0.074)
Intercept	0.59*** (0.13)		
Country FEs	✗	✓	✓
p-value: $\beta_1 = 1$	0.018	0.004	0.003
Obs.	378	1,849	2,227
R ²	0.22	0.20	0.22
Within R ²	—	0.13	0.14

SEs in (1) are heteroskedasticity and autocorrelation-robust [Lazarus et al. (2018)], and in (2)–(3) are clustered by exchange and month.

- Forward sobe 1% e spot futura sobe 0.73%
- Forward explica 20% da variação da spot futura
- Mercado entende qualitativamente a variação do prêmio de risco, mas quantitativamente há excesso de persistência.

Average Forecast Errors Across Countries

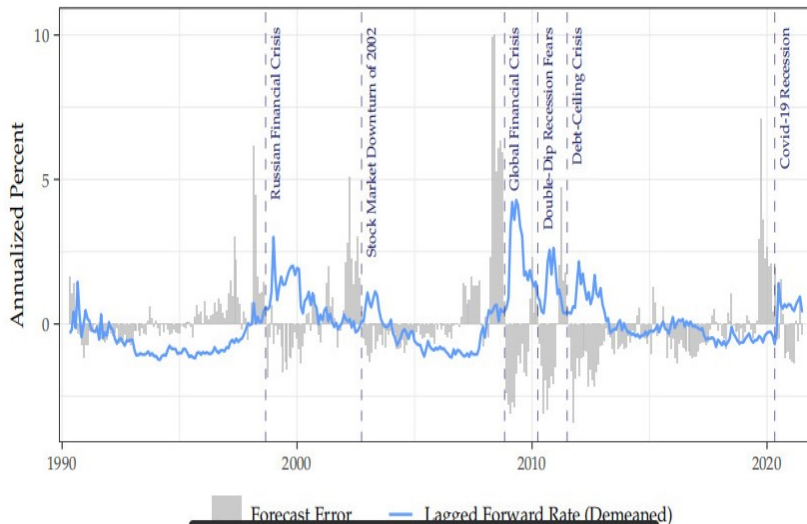
$$\varepsilon_{t+6}^{(6)} = \mu_{t+6}^{(6)} - f_t^{(6,6)}$$

	(1) U.S.	(2) Ex-U.S.	(3) All
Average	0.021 (0.15)	0.20 (0.11)	0.17 (0.11)
Obs.	378	1,849	2,227

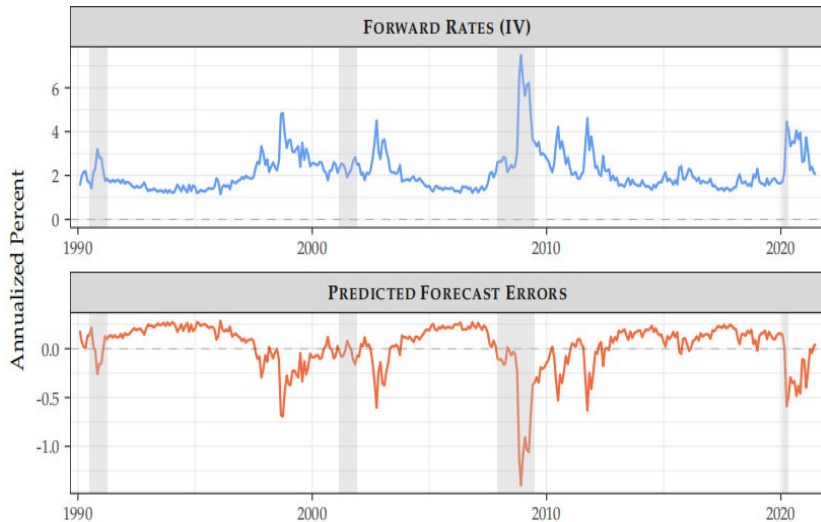
SEs in (1) are HAR [Lazarus et al. (2018)], and in (2)–(3) are clustered by exchange and month.

- Não somente estatisticamente insignificante, mas "efetivamente" zero.
- Logo, não podemos rejeitar log utilidade e expectativas racionais apenas pela média dos erros.
- Porém, erro médio mascara substancial preditabilidade.

Erros de previsão e forward lagged



Forward como predictor de erros de previsão



Regressions of Forecast Errors on 2×1 Forward Rate

$$\varepsilon_{t+6}^{(6)} = \beta_0 + \beta_1 f_t^{(2,1)} + e_{t+6}$$

	(1)	(2)	(3)
	U.S.	Ex-U.S.	All
$f_t^{(2,1)}$	-0.17** (0.066)	-0.16** (0.049)	-0.16*** (0.047)
Intercept	0.39* (0.23)		
Country FEs	✗	✓	✓
Obs.	378	1,849	2,227
R ²	0.04	0.04	0.04
Within R ²	—	0.03	0.03

SEs in (1) are HAR [Lazarus et al. (2018)], and in (2)–(3) are clustered by exchange and month.

- forward superestima spot futura ainda.
- Usamos $f_t^{(2,1)}$ para não ter $f_t^{(6,6)}$ dos dois lados.

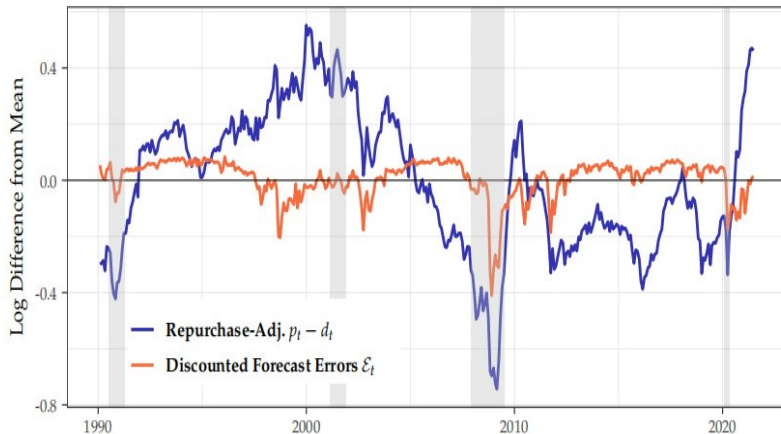
Quão significantes são os erros de previsão para variação dos preços?

$$p_t - d_t = \kappa - \mathbb{E}_t r_{t+1} - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j f_t^{(j,1)} - \underbrace{RF_t}_{\text{discounted risk-free rates}} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \mathbb{E}_t \Delta d_{t+j+1}$$

$$f_t^{(j,1)} = \underbrace{\mathbb{E}_t [\mu_{t+j}^{(1)}]}_{\text{expected spot rates}} - \underbrace{\mathbb{E}_t [\varepsilon_{t+j}^{(1)}]}_{\text{predictable forecast errors}}$$

- Suponha que um período seja 6 meses, mas preveja erros com $f_t^{(2,1)}$
- Assuma que $\mathbb{E}_t \varepsilon_{t+j+1}^{(1)} = \Phi^j \varepsilon_{t+j}^{(1)}$ [De la O e Myers (2021)] e $\Phi^j 1$
- Use essas hipóteses para estimar contribuição de erros no preços.
- Compare com repurchase-adj. $p_t d_t$ de Nagel e Xu (2022)

Erros de previsão descontados vs variação de price-dividend



Meaningful in magnitude, esp. in crises, and on average $\mathcal{E}_t$ moves 0.5-for-one with $p_t - d_t$

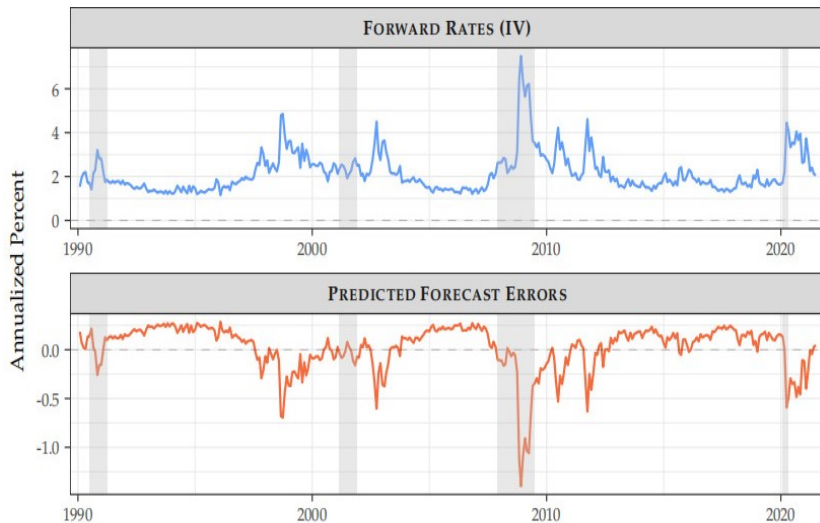
1 Livingston survey of prof. forecasters:

- expectativas de preços de 6 a 12 meses permitem prever:
- $\mu_t^{12meses}, \mu_t^{6meses}$
- $f_t^{6meses} = \mu_t^{12meses} - \mu_t^{6meses}$
- $\epsilon_{t+6}^{6meses} = \mu_{t+6}^{6meses} - f_t^{6meses}$

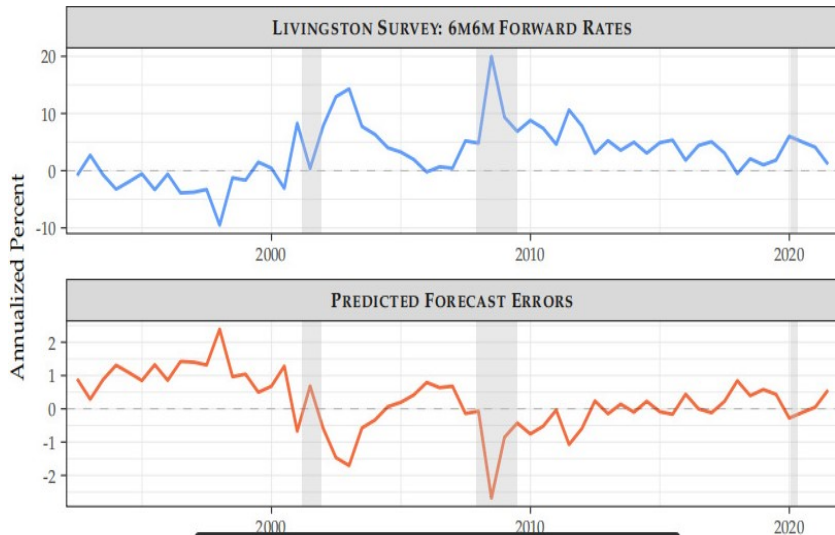
2 Duke CFO survey:

- 1 ano e 10 anos de expectativas de retorno permitem:
- $\mu_t^{10anos}, \mu_t^{1ano}$
- $f_t^{9anos,1ano} = \mu_t^{10anos} - \mu_t^{1ano}$
- $\epsilon_{t+6}^{6meses} = \mu_{t+1}^{9anos} * \frac{9}{10} - f_t^{9,1}$

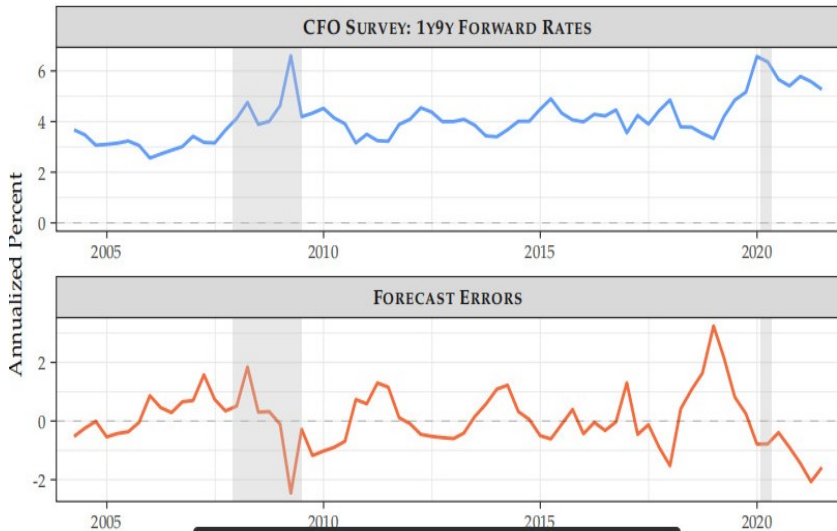
Relembrar; Forward e erros de previsão de opções



Excesso de Ciclicidade: evidência consistente com Surveys



Excesso de Ciclicidade: evidência consistente com Surveys



Expectations Measured by:			
	Options	Livingston Survey	CFO Survey
Panel A. Predictability in Spot Rates ($\mu_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_1 f_{i,t} + e_{i,t+1}$)			
β_1	0.88	0.68	0.63
R^2	0.71	0.38	0.46
Panel B. Predictability of Forecast Errors ($\epsilon_{i,t+1} = \beta_0 + \beta_1 f_{i,t} + e_{i,t+1}$)			
β_1	-0.34	-0.19	-0.15
R^2	0.06	0.06	0.03

	Expectations Measured by:		
	Options	Livingston Survey	CFO Survey
Panel A. Correlation in Forward Rates Across Measures			
Options	1	0.46	0.11
Livingston Survey		1	0.55
Panel B. Cyclical Variation in Forward Rates and Forecast Errors			
$\rho(f_{i,t}, 1/CAPE_t)$	0.04	0.42	0.21
$\rho(\epsilon_{i,t+1}, 1/CAPE_t)$	-0.38	-0.19	-0.38

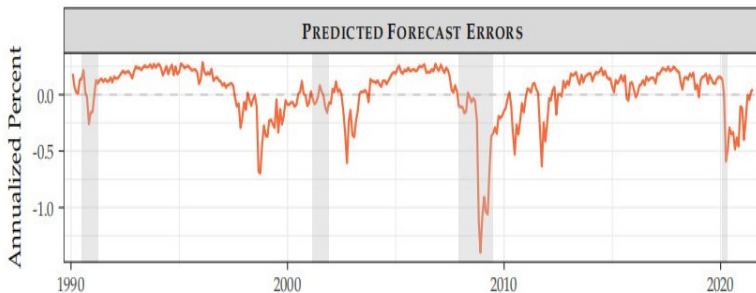
Paper considera duas explicações alternativas:

- ① Expectativas racionais e prêmio de risco (-)
 - Preço do discount-rate risk deve ser muito volátil e contracíclico para o trabalho.
 - SDF não muda de sinal nas condições de Gao e Martin
- ② Erros de expectativa:
 - Modelo simples calibrado com log utilidade
 - aumento no equity premium $\Rightarrow$ investidores superestimam equity premium futuro.
 - Um parametro θ que rege a superestimação de sinais
 - $\theta = 0$ [RE], $\theta = 0.91$ [Bordalo et al. (2018, 2019) estimate]

erros de previsão podem ser racionalizados?

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\varepsilon_{t+n}^{(m)} \right] - \underbrace{\text{Cov}_t \left(MR_{t,t+n}, \mathbb{E}_{t+n} \left[r_{t+n,t+n+m} \right] \right)}_{\varsigma_t}$$

- Que condições precisamos para que $\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right]$ seja imprevisível? $-\varsigma_t$ deve ter o mesmo sinal que erros previstos.



Main challenge: Small on average, but must flip signs dramatically (– in good times, + in bad).

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\varepsilon_{t+n}^{(m)} \right] - \underbrace{\text{Cov}_t \left(MR_{t,t+n}, \mathbb{E}_{t+n} [r_{t+n,t+n+m}] \right)}_{\varsigma_t}$$

- Que condições precisamos para que $\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right]$ seja imprevisível?
- $-\varsigma_t$ deve ter o mesmo sinal que erros previstos.
- Por simplicidade: pegue $n = m = 1$ e assuma SDF e reornos sejam log normais conjuntamente.
- $-\varsigma_t > 0$ (como necessário em tempos ruins) se e somente se:

$$SR_t(-\mu_{t+1} > -\rho_t(r, \mu)\sigma_t(r))$$

SR é o sharpe ratio

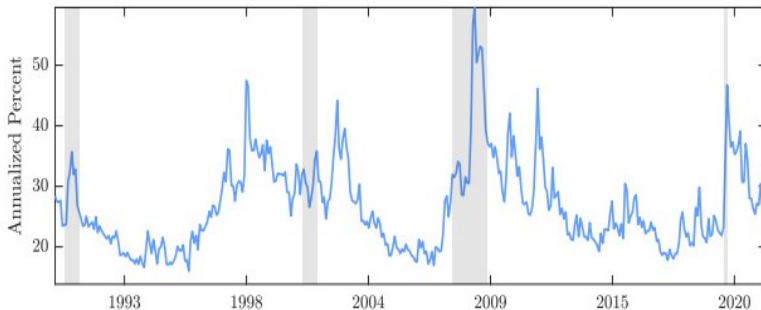
- Correlação $\rho_t(r, \mu)$ provavelmente negativa, seja igual a -1
- Logo, SR_t deve variar mais que $\sigma_t(r)$ para que $-\varsigma_t$ mude sinal.
- Calibração: pegue as opções com log utilidade e estime $\sigma_t(r)$

erros de previsão podem ser racionalizados?

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\varepsilon_{t+n}^{(m)} \right] - \underbrace{\text{Cov}_t \left(MR_{t,t+n}, \mathbb{E}_{t+n} \left[r_{t+n,t+n+m} \right] \right)}_{\varsigma_t}$$

- Que condições precisamos para que $\mathbb{E}_t \left[\hat{\varepsilon}_{t+n}^{(m)} \right]$ seja imprevisível?
- Logo, SR_t deve variar mais que $\sigma_t(r)$ para que $-\varsigma_t$ mude sinal.
- Calibração: pegue as opções com log utilidade e estime $\sigma_t(r)$
- Não troca o sinal nas condições de Gao e Martin

Resultados para volatilidade condicional de retorno de mercado de 6 meses



Agora vamos examinar a segunda ideia e propor um modelo para erros de expectativa.

- Considere uma versão de Bordalo, Gennaioli, Shleifer (2018).
- Dinâmica de uma spot de 3 meses sob uma medida objetiva

$$\mu_t^{(3)} = \left(1 - \sum_{j=1}^3 \phi_j\right) \bar{\mu} + \phi_1 \mu_{t-1}^{(3)} + \phi_2 \mu_{t-2}^{(3)} + \phi_3 \mu_{t-3}^{(3)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$$

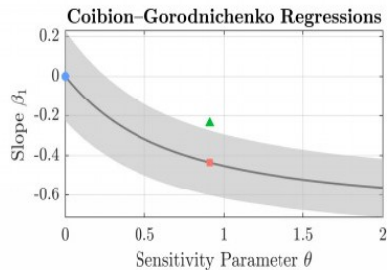
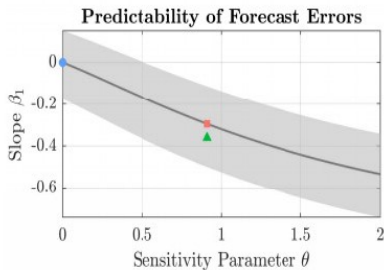
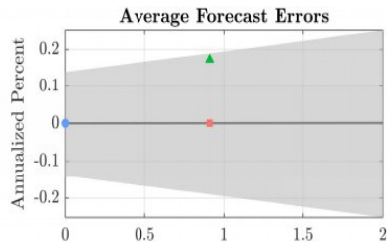
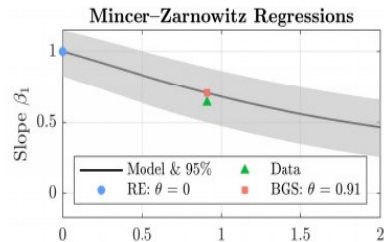
- Sob RE, estrutura termo da spot corrente será baseado em $\mathbb{E}_t[\mu_t^{(3)}]$
- Sob expectativas subjetivas: sensibilidade a um sinal é guiado por θ

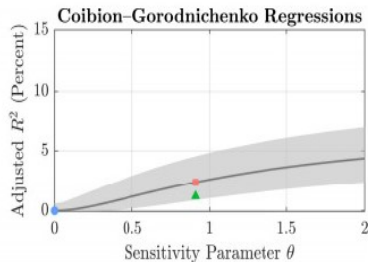
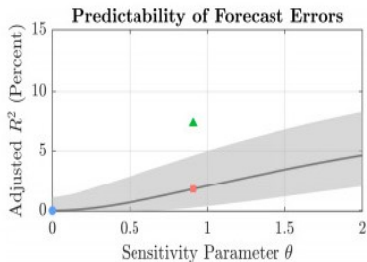
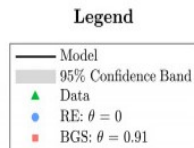
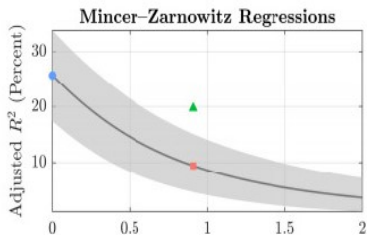
$$\mathbb{E}_t^\theta \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] + \underbrace{\theta \left(\mathbb{E}_t \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] - \mathbb{E}_{t-3} \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] \right)}_{\text{news} \propto \epsilon_t}$$

$$\mu_t^{(3)} = \left(1 - \sum_{j=1}^3 \phi_j\right) \bar{\mu} + \phi_1 \mu_{t-1}^{(3)} + \phi_2 \mu_{t-2}^{(3)} + \phi_3 \mu_{t-3}^{(3)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$\mathbb{E}_t^\theta \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] = \mathbb{E}_t \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] + \underbrace{\theta \left(\mathbb{E}_t \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] - \mathbb{E}_{t-3} \left[\mu_{t+n}^{(3)} \right] \right)}_{\text{news} \propto \epsilon_t}$$

- Forward baseada em expectativas subjetivas
- Considere um range de valores: $\theta = 0$ (RE) e $\theta = 0.91$ BGS (2018), BGLS (2019)
- Estimou-se parâmetros objetivos para a spot em cada país.
- Para cada θ , simulou-se 10000 amostras e rodaram as mesmas regressões dos testes





- Introduz um novo meio de medir a estrutura termo do equity premium esperado.
- Evidência robusta sobre excesso de anticiclicidade nas expectativas de retorno da forward.
- Investidores consistentemente superestimam quão longo será sua expectativa de bull market.
- Consistente com dados de opções e com surveys
- Modelo de erros de expectativas